Přehled probrané geometrie

Kružnice

1. Definice, zápis

Množina všech bodů, které mají od pevného bodu (středu S) stejnou vzdálenost (poloměr r)

Zapisujeme: $k(S; r = xcm)$

písmeno označující kružnici, označení středu kružnice (u trojúhelníku to může být A, B, S_{AB} aj.)

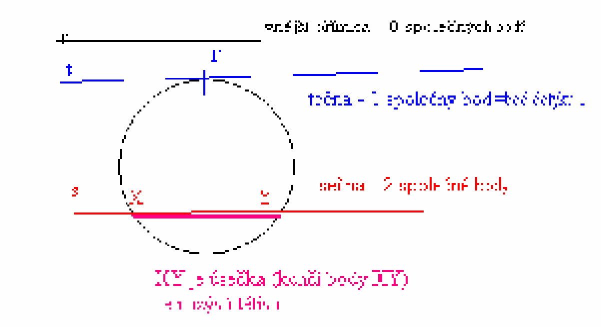
CO umět: bez zaváhání zapsat jakoukoliv kružnici,
do konce roku vědět, že když jeden bod je od druhého vzdálen určitou vzdálenost, pak leží na kružnici – používá se v trojúhelnících – budeme se učit.

2. Vzájemná poloha kružnice a přímky

Existují tři možnosti, podle toho, kolik mají společných bodů

Jiná možnost neexistuje – buď žádný, nebo jeden, nebo dva.

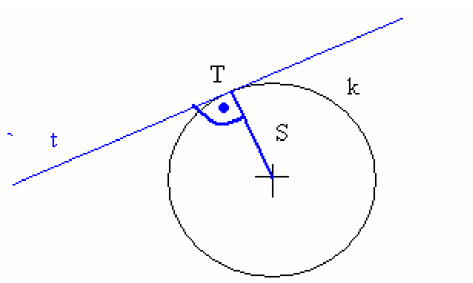
Co umět: jenom vědět, jak se která přímka jmenuje, a že u tětivy můžeme určit délku



3. Tečna

tečna má s kružnicí jediný společný bod – bod dotyku T
vlastnost tečny – je kolmá na přímku ST (na poloměr)

u bodu dotyku je pravý úhel – to je dobré si uvědomit při početních úlohách – můžeme použít Pyth. větu
při konstrukčních – můžeme použít Thaletovu kružnici



<u>Zadání konstrukčních úloh</u>

1. *Sestroj tečnu ke kružnici z bodu T, který leží na kružnici.*
   (to je jednoduché, spojí se T se středem a pak se sestrojí kolmice k této přímce – viz. zelená učebnice strana 10)

2. *Sestroj tečny ke kružnici z bodu M, který leží vně kružnice ve vzdálenosti 5cm od středu S.*
   Tady už musíme použít Thaletovu kružnici.
   Nejdříve spojíme bod M se středem kružnice (2),

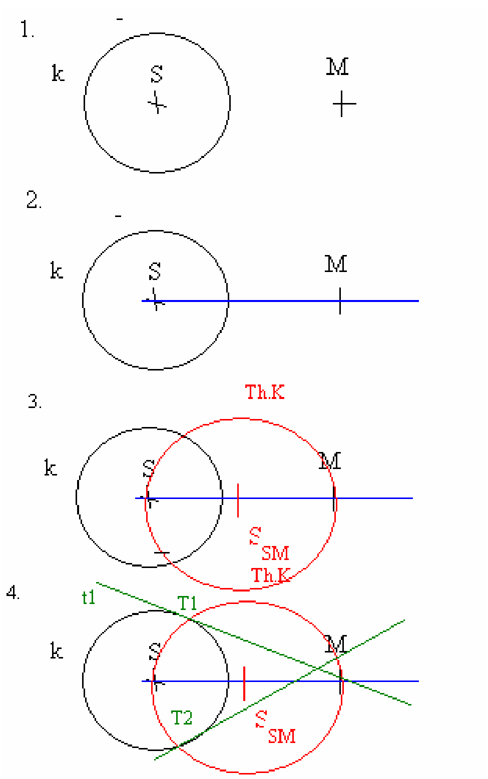
   $$\boxed{\begin{array}{l} 1. k; k(S, r = 3cm) \\ 2. M, |SM| = 5cm \\ 3. Th.k. nad\ SM \end{array}}$$

   pak uděláme Thaletovu kružnici nad SM (kružnice má střed ve středu úsečky SM a poloměr polovina délky SM) (3).

   Tam, kde se protne kružnice s Thaletovkou je bod dotyku. Dostaneme takto dva body T_1 a T_2. Pak spojíme M s těmito body.

   $4. T; T \in k \cap Th.k$

   $5. t, t = MT$



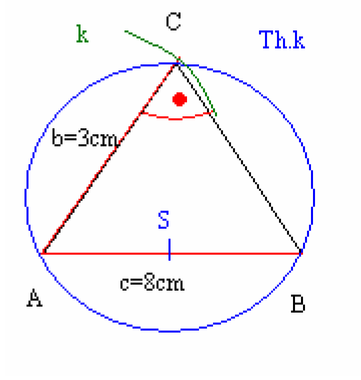
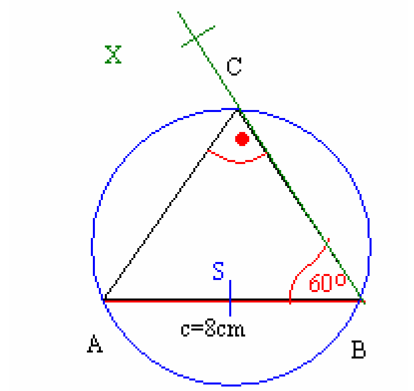
4. Použití Thaletovy věty

Thaletova věta říká, že když je trojúhelník ABC pravoúhlý s pravým úhlem u C, tak C leží na kružnici s poloměrem 1/2AB a středem ve středu úsečky AB. Obrácená Th. v. říká, že když leží bod C na kružnici, která má střed na úsečce AB a poloměr 1/2AB, tak trojúhelník ABC je pravoúhlý.

Na první pohled vypadají ty věty stejně, že říkají totéž, ale rozdíl je v tom, z čeho vycházejí – buď už víme, že je trojúhelník pravoúhlý, nebo víme, že C je na kružnici. V učebnici to spojili do jedné věty, což se mi vůbec nelíbí.

Použití:
- výpočty při použití pythagorovy věty (to zatím nechci)
- konstrukce pravoúhlých trojúhelníků nebo konstrukce tečen (to chci)

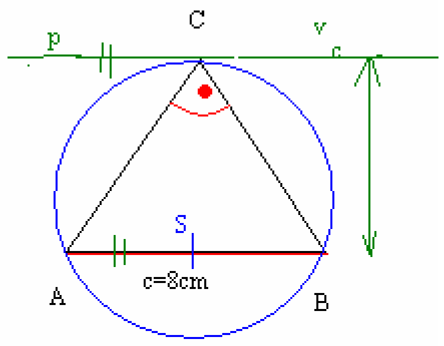
Konstrukce pravoúhlých trojúhelníků. Máme několik druhů zadání, ale je to pořád dokola

Sestroj pravoúhlý trojúhelník ABC, když délka přepony AB je 8cm, a vzdálenost AC je 3cm	POZNAMKY	Sestroj pravoúhlý trojúhelník ABC, když délka přepony AB je 8cm, a velikost úhlu ABC je 60^o
tzn. máme dvě délky		*tzn. máme délku a úhel*
 	Náčrtek je nutné udělat veliký a vždycky si barevně označit, co známe. Pro přehlednost u rozboru používám stejné barvy jako v obrázku.	
Rozbor: - U C je pravý úhel – leží tedy na Th. k. nad AB - vzdálenost AC je 3cm, takže C leží na kružnici k, se středem v A a poloměrem 3 cm	Vycházíme z toho, co je červené. Vždycky tu musí být dvě vlastnosti. U této písemky je to ta první – modrá. Ta druhá vlastnost je podle zadání. U úhlu nesmíme použít písmenko C, to neznáme, takže si pomáháme tím X, je to lib. bod na rameni úhlu	Rozbor: - U C je pravý úhel – leží tedy na Th. k. nad AB - úhel ABC je 60^o, takže C leží na rameni BX úhlu ABX
Postup: $1. AB; \|AB\| = 8cm$ $2. Th.k\ nad\ AB$ $3. k; k(A, r = 3cm)$ $4. C; C \in TH.k. \cap k$ $5. \Delta ABC$	Všimni si – první body jsou stejné, liší se až v 3. symboly: $\|\ \|$ označuje délku, velikost $\in$ je prvkem, leží $\cap$ průnik, průsečík, kde se protnou dva útvary, tam je bod na začátku je to, co chceme narýsovat, za ; je vlastnost – co o tom víme	Postup: $1. AB; \|AB\| = 8cm$ $2. Th.k\ nad\ AB$ $3. BX; \|\angle ABX\| = 60^0$ $4. C; C \in Th.k \cap BX$ $5. \Delta ABC$

Vědět:
- pravý úhel je naproti přeponě
- přepona je nejdelší strana v trojúhelníku
- poznat ze zadání, kde je který úhel (vrchol úhlu je vždy uprostřed: $\angle SXY = 60^0$, tak těch 60 je u vrcholu X, ten je uprostřed
- umět narýsovat úhly 45, 60 bez úhloměru, umět narýsovat libovolný úhel s úhloměrem
- umět zapsat – naučit se, co se jak píše (já zápis zkracuji – správně by tam ještě mělo být ve dvou krocích zapsané, jak tu Thaletovku dostaneme . viz zelená učebnice str. 21)

Další konstrukce – ještě jsme nebrali, ale pro úplnost ji tu dávám, do konce roku to budeme umět

Sestroj pravoúhlý trojúhelník ABC, když délka přepony AB je 8cm, a výška v_c je 3 cm	Rozbor: - U C je pravý úhel – leží tedy na Th. k. nad AB

(nebrali jsme)	- bod C leží na výšce v_c, tedy na přímce p rovnoběžné s AB a vzdálené 3cm
	Postup: $1. AB; \lvert AB \rvert = 8cm$ $2. Th.k\ nad\ AB$ $3. p, p \parallel AB, v(p, AB) = 3cm$ $4. C; C \in TH.k. \cap p$ $5. \Delta ABC$ Diskuse: Úloha má dvě řešení.

Co umět:
- Teď: vědět, kde a jak sestrojit Thaletovu kružnici, umět sestrojit bez zaváhání ty dva první trojúhelníky, umět zapsat postup ve zkrácené verzi. Jinak totéž je v zelené na stranách 21, 22.
- Do konce roku (zatím nechci): umět dopočítat vzdálenosti a délky v trojúhelnících pomocí Pythagorovy věty (týká se úloh, kde se vyskytují tečny, pak musíte vědět něco o Thaletovce).

Početní geometrie

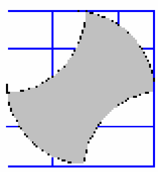
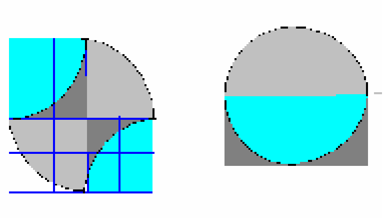
1. Kružnice, kruh

Délka je totéž co obvod (omotávání provázků kolem toaletního papíru)

$\boxed{o = 2p\ r = p\ d}$

Pozor na záměnu poloměru a průměru, pozorně číst zadání!!!

<u>Použití:</u>

Příklad	**Výpočet**	**Poznámky**
Nejjednodušší – vypočítat obvod kruhu, když je zadán poloměr (průměr)	urči délku kružnice, když <u>poloměr je 2cm</u> r = 2cm, o = ? $o = 2p\ r$ $o = 2.3{,}14.2$ $o = 12{,}56cm$ urči průměr, když obvod <u>kružnice je 15cm</u> o=15cm, r = ? $o = 2p\ r \rightarrow r = \frac{o}{2p}$ $r = \frac{15}{2p}$ $r = 2{,}39cm$	dávat pozor na jednotky – nezapomenout! je jedno, jestli počítáme s průměrem nebo poloměrem, co se vám víc líbí. Oba vzorce se musíte naučit nazpaměť, protože ještě neumíme upravovat výraz. Je jedno, jestli používáte π na kalkulačce nebo 3,14. U druhého pozor na zadání 15:(2π) do kalkulačky, musíte použít buď závorky nebo spočítat 2π a pak vydělit. Když to zadáte 15:2.π, tak to hodí jiný výsledek. Na rozdíl od vás totiž kalkulačka dodržuje prioritu operací :-)
Délka kružnice vepsané do čtverce	Urči obvod kružnice vepsané do čtverce. Čtverec má délku strany a = 6cm.	viz Terka K. forum 10_4 v sekci Řešení přijímaček
Délky různých obrazců	Délka strany čtverce čtvercové sítě je 1 cm. Vypočítej obvod vybarvené části.  Přeskládaný obrázek.  r = 2cm (2 čtverečky), o = ? $o = 2p\ r$ $o = 2.3{,}14.2$ $o = 12{,}56cm$	zelená str. 26 lepší obrázek je ve sb. 139/9 U těchto příkladů je třeba si dobře rozdělit obrázek. Dvě šedé části dají dohromady půlkruh. Ty vykrojené části (tmavě šedé) mají stejný okraj jako modré části. U čtvercových sítí je nutné dát si pozor na to, kolik je jeden čtvereček, zpravidla je to 1cm, ale může být jiná hodnota.
Úlohy ze života praktické úlohy, kde je víc výpočtů	Průměr kola na Tomášově kole je 65 cm, průměr kola na Danově kole je 56 cm. Na společném výletě ujeli 23 km. Urči, o kolik víc otáček muselo během výletu udělat kolo na Danově kole než kolo na Tomášově kole. $d_T = 65cm; d_D = 56cm; l = 23km = 23000m$ $o = p\ d \quad o_T = p.65 = 204{,}20cm = 2{,}04m$ $o_D = p.56 = 176cm = 1{,}76m$ počet otáček: $p_T = 23000 : 2{,}04 = 11275$ $P_D = 23000 : 1{,}76 = 13068$ O kolik víc: $p_D - p_T = 1793$ Danovo kolo se muselo otočit o 1793 otáček víckrát než Tomášovo.	variace na studnu (sb. 135/10), na Londýnské oko (zelená 28/12) indexem T, resp. D jsou označeny hodnoty pro Tomášovo, resp. Danovo kolo převod na metry jsem zvolila kvůli des. čárkám, ale můžete pracovat v km, nebo v cm, podle vlastní úvahy. Je to jedno. Jediné, co musí být – stejné jednotky. U těchto příkladů jde o to, zjistit, kolikrát se délka kružnice vejde do nějaké dráhy, délky. Takže vzdálenost dělíme délkou kružnice.

2. Kruh - Obsah

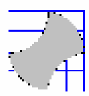
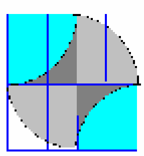
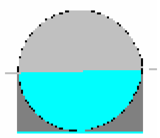
u kruhu (u kružnice je počítání obsahu blbost)
To, co je to vybarvené, co můžeme pomalovat.

$\boxed{\begin{array}{l} S = p\ r^2 \\ r = \sqrt{\dfrac{S}{p}} \end{array}}$ jednotky jsou čtvereční! Pozor na převody!!

Taky si dávejte dobrý pozor na poloměr – průměr. Teď už musíme pracovat s poloměrem (ne že by to s průměrem nešlo, ale museli bychom ho umocnit $\boxed{S = p\ r^2 = p.\left(\dfrac{d}{2}\right)^2 = p\,\dfrac{d^2}{4}; d = \sqrt{\dfrac{4S}{p}}}$

Myslím, že je jasné, že je jednodušší převést průměr na poloměr, než si tyto hrůzy pamatovat, že?

Použití:

Příklad	**Výpočet**	**Poznámky**
Jednoduché – dosazení do vzorce	Urči obsah kruhu, je-li poloměr 5 cm $S = p\ r^2$ $S = p\ 5^2$ $S = 78{,}54 cm^2$ Urči průměr kruhu, jehož obsah je 20 m^2. $r = \sqrt{\dfrac{S}{p}}$ $r = \sqrt{\dfrac{20}{p}}$ $r = 2{,}52 \rightarrow d = 2r = 2.2{,}52 = 5{,}04m$	
Obsahy vybarvených částí	Délka strany čtverce čtvercové sítě je 1 cm. Vypočítej obsah vybarvené části.    $S = p.r^2$ S_1 světlešedé části: $S = p.2^2 = 12{,}56cm^2$ $S_1 = \dfrac{1}{2}S = 6{,}28cm^2$ S_2 tmavě šedé části (je to zbytek z obdélníka, když odečteme tu modrou část) $S_{obde\ln ik} = 4.2 = 8cm^2$ $S_{\mod ry} = \dfrac{1}{2}p\ r^2 = 6{,}28cm^2$ $S_2 = S_{obde\ln ik} - S_{\mod ry}$ $S_2 = 8 - 6{,}28$ $S_2 = 1{,}72cm^2$ Obsah celé části – ty šedé $S = S_1 + S_2 = 6{,}28 + 1{,}72 = 7{,}98cm^2$	Používá se odčítání – vypočítáme nějaké dvě části a pak různě odečítáme. Chce to cvik „vidět“ ty části, které máme sčítat a odčítat. Je dobré si obrázek rozdělit, většinou se skládá z půlek nebo čtvrtek kruhů a odečítáme od čtverců a obdélníků. Světlá část je půlka kruhu, proto je tam ½ U modrého můžeme využít výsledku S1 bez počítání. Když se podíváte do zelené str 31 tak u a) je kruh a čtverec, u b) je to obdélník + ½ kružnice, u c) ustřihnem tu dolní kružnici a přidáme nahoru – máme obdélník, u d) odbélník a od něj odečteme půlku kruhu, u e) obdélník a odečteme celý kruh (ty bílé části).

Praktické	Ke stromu je přivázána kráva provazem 3,5m dlouhým, jak velká plocha pastvy je jí vykázána (zelená 30/5) r= 3,5m, S=? $S = p\ r^2$ $S = p\ 3{,}5^2$ $S = 38{,}5cm^2$ Kráva spásá plochu o velikosti 38,5 cm^2.	

Co umět:
- číst (to vypadá, že žertuji, ale smutné je, že to myslím vážně)
- nazpaměť uvedené vzorce (S, r, d)
- ze zadání umět uděl nákres a pochopit, co se chce
- převody jednotek (m^2 = 100 cm^{2,} 1km^2 = 1 000 000m^2 atd.)
- zaokrouhlovat – moje výsledky v uvedených příkladech někdy úplně „nesedí“, je to tím, že používám paměť na kalkulačce a zaokrouhluji až na závěr
- „vystřihnout“ objekty, uvědomit si, kdy sčítat, kdy odčítat u příkladů s určováním obvodu a obsahu u složitějších obrazců (podložky, čtvercová síť)
- obsahy a obvody čtverce a obdélníku
- ovládat vlastní kalkulačku, vědět, že kalkulačce není jedno, jak zadáváte hodnoty, používat paměť nebo závorky (podle toho, co vaše kalkulačka umí)

Na co nezapomenout:
- na odpovědi
- na jednotky (v zadání zkontrolovat, jestli máme všechno ve stejných jednotkách, když ne – převést, na závěr jestli je máme uvedeny v závěru výpočtu a v odpovědi)
- na výpis toho, co známe
- na náčrtek – dělat geometrii bez náčrtku je hazard a projev naprostého nepochopení

<u>Pozn. Početní geometrické úlohy jsou velmi často na přijímačkách, zvláště ve Scio testech se v tom vyžívají, takže se FAKT naučte!</u>

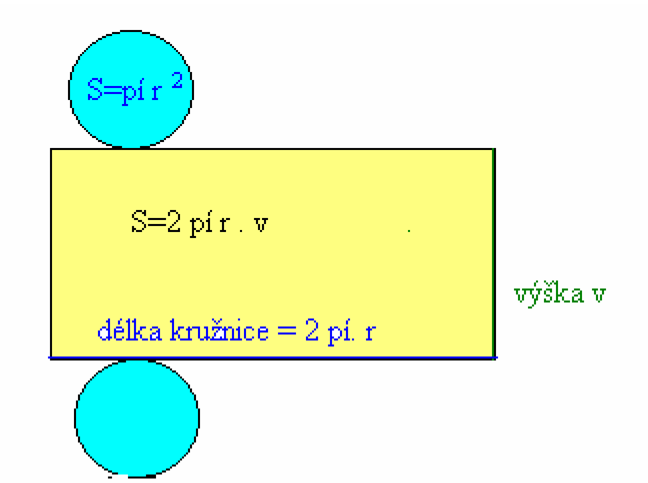
Válec

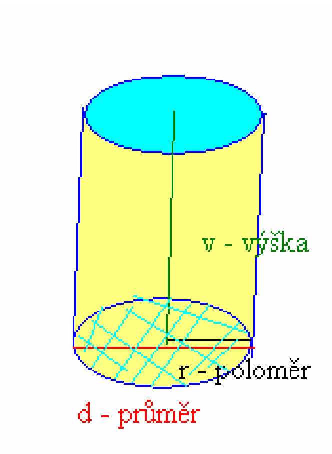
$S = 2p.r(r+v)$

$V = 2p.r^2 v$ $\quad v = \dfrac{V}{2p.r^2}$ $\quad r = \sqrt{\dfrac{V}{pv}}$ jednotky jsou objemové (l, m^3, cm^3)

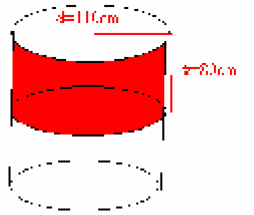
Platí: 1 litr = 1dm^2, další jednotky viz Přehled jednotek na webu v sekci – Obecné.

Síť:





Použití:

Příklad	Výpočet	Poznámky
Jednoduchý – dosazení do vzorce	Urči povrch a objem válce s výškou 3cm a průměrem 10 cm. v = 3cm; d=10 cm tj. r = 5cm $S = 2p.r(r+v)$ $S = 2p.5(5+3)$ $\underline{\underline{S = 251{,}33cm^2}}$ $V = 2p.r^2v$ $V = 2p.5^2 3$ $V = 471{,}24cm^3$ Urči poloměr válce, když víš, že objem je 10 l a výška 0,5 m r=?, v = 0,5 m = 5dm; V = 10l = 10 dm^3 $r = \sqrt{\frac{V}{pv}}$ $r = \sqrt{\frac{10}{p5}}$ $r = 0{,}79dm$ Poloměr válce je 0,79dm.	Při počítání objemů byste měli mít představu: obyčejný kýbl – cca 10 – 15l má výšku cca 50 cm a poloměr cca 15 cm hrnek – cca 0,2 l – výška 10 cm, průměr 7cm Takže když vám něco vyjde, zkuste si to porovnat s nádobami, které máte doma a znáte je. – PET láhev, hrnek, hrnec, rychlovarná konvice, kýbly atd.
Aplikace – praktické příklady	Stavební firma postavila 12 reklamních sloupů. Každý sloup má průměr 120 cm a výšku 330 cm. Kolik čtverečních metrů reklamní plochy tím město získalo? d=120 cm = 1,2 m tj. r = 0,6m <u>v = 330 cm = 3,3m</u> $S = 2p.r.v$ $S = 2p.0{,}6.3{,}3$ $S = 12{,}44m^2$ 12 válců tj. 12 . 12,44 = 149,3m^2 Město získalo 149 m^2 reklamní plochy.	Tady je nutné si vždycky uvědomit, jestli počítáme s víkem (např. povrch sudu – víko nenatíráme, komín nemá ani dno ani vrch), u objemů jestli lijeme do celého válce, do půlky válce atd. sb. 147/10
	Voda ve studni klesla o výšku jedné skruže. Skruž má vnitřní průměr 110 cm a výšku 80 cm. Kolik ve studni ubylo vody. Napovíme: Skruže jsou betonové prstence tvořící stěny studny. d=110 cm tj r=55 cm, v=80 cm, V=?  $V = p.r^2v$ $V = p.55^2 80$ $V = 760265{,}42cm^3 = 760{,}265dm^3 \doteq 760l$	Dávejte si pozor, zda je určen vnitřní nebo vnější průměr. Nelekněte se názvů, které neznáte (skruž), buď je to vysvětleno, nebo to jde poznat ze zadání, co to vlastně je. V zadání není jasné, v jakých jednotkách má být výsledek, když skončíte cm^3, nemůže nikdo nic říct, ale většinou je požadovaný výsledek v litrech. Všimněte si – převod z cm^3 na dm^3 – posun desetinné čárky o 3 místa.

Co umět
z minulého učiva: procenta, převody jednotek, objem a povrch krychle, poměr (urči poměr objemu válce a objemu krychle, do něhož je válec vložený, vztah pro hustotu: $V = m/\rho$, $\rho = m/V$, $m = \rho.V$
z nového učiva:
- vzorce
- nakreslit síť kvádru a umět toho využít při řešení úloh
- nakreslit válec a označit jeho parametry (výšku, poloměr, průměr)
- u praktických úloh umět situaci nakreslit